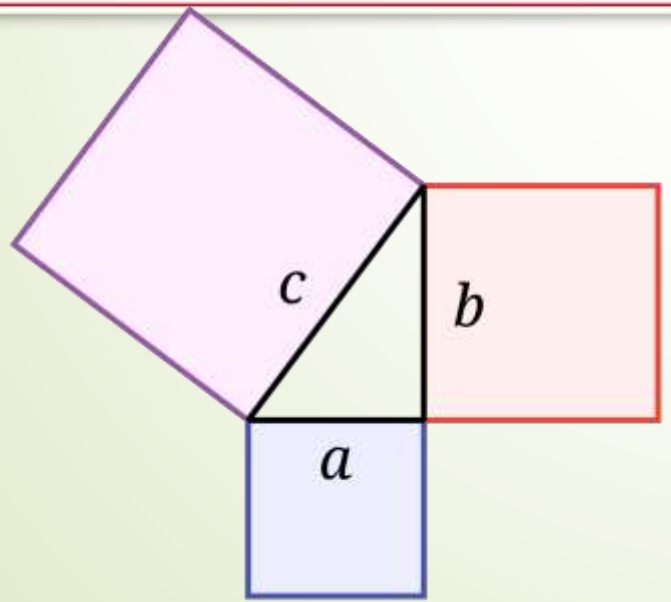
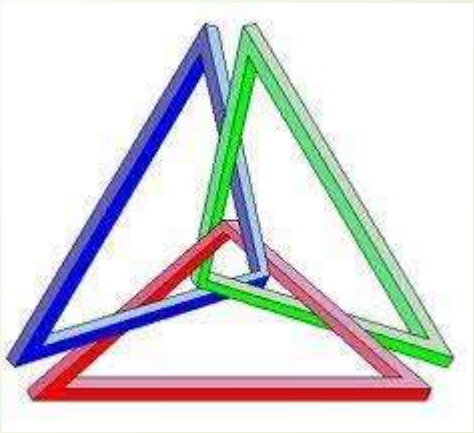
الوحدة الخامسة

المثلثات و نظرية فيثاغورس





الدرس 2

البرهان الهندسي

سوف نتعلم :

1. استخدام الطلاب خواص الرياضيات لتبرير خطوات حل معادلة
2. يستخدم الطلاب الخواص و التعاريف و النظريات لبرهان فرضية

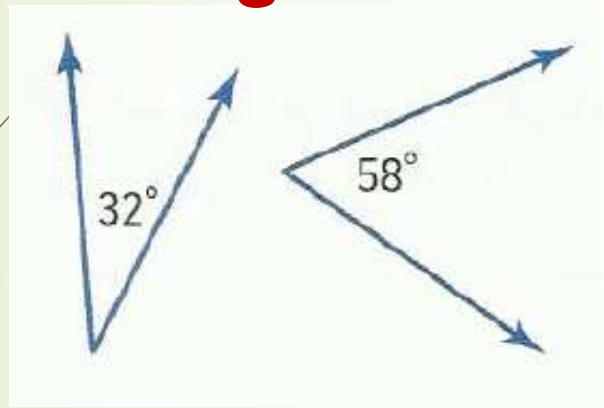
مراجعة شاملة

زاويتان متتامتان مجموع قياسيهما $90°$

زاويتان متكاملتان مجموع قياسيهما $180°$

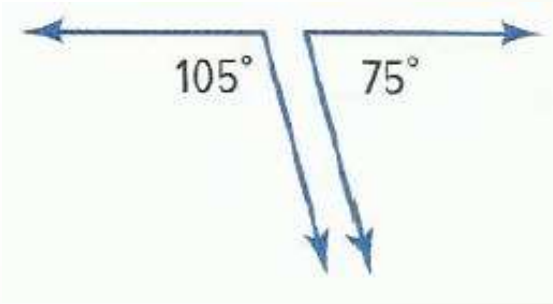
صنّف كل زوج من الزوايا على أنهما متتامتان، أو متكاملتان، أو لا شيء من ذلك.

متتامتان



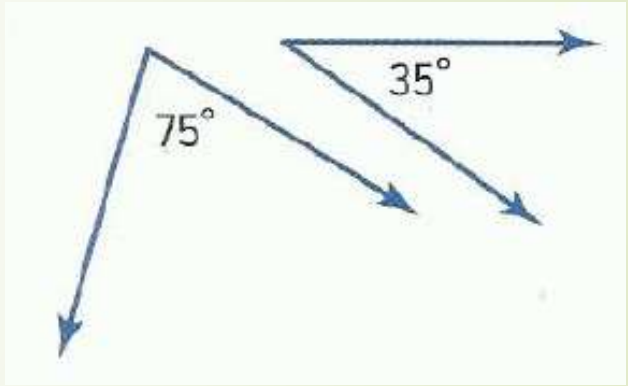
$32 + 58 = 90$

متكاملتان



$105 + 75 = 180$

لا شيء من ذلك

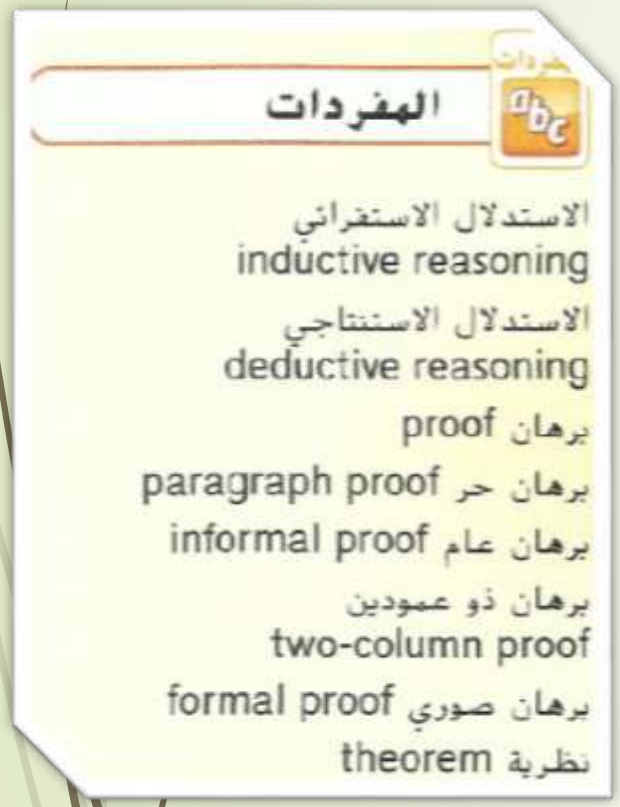


$75 + 35 = 110$

صفحة 379

المفردات

المصطلح باللغة الانجليزية	المصطلح باللغة العربية
Inductive reasoning	الاستدلال الاستقرائي
Deductive reasoning	الاستدلال الاستنتاجي
Proof	برهان
Paragraph proof	برهان حُر
Informal proof	برهان عام
Two-column proof	برهان ذو عمودين
Formal proof	برهان صوري
Theorem	نظرية



الربط بالحياة اليومية

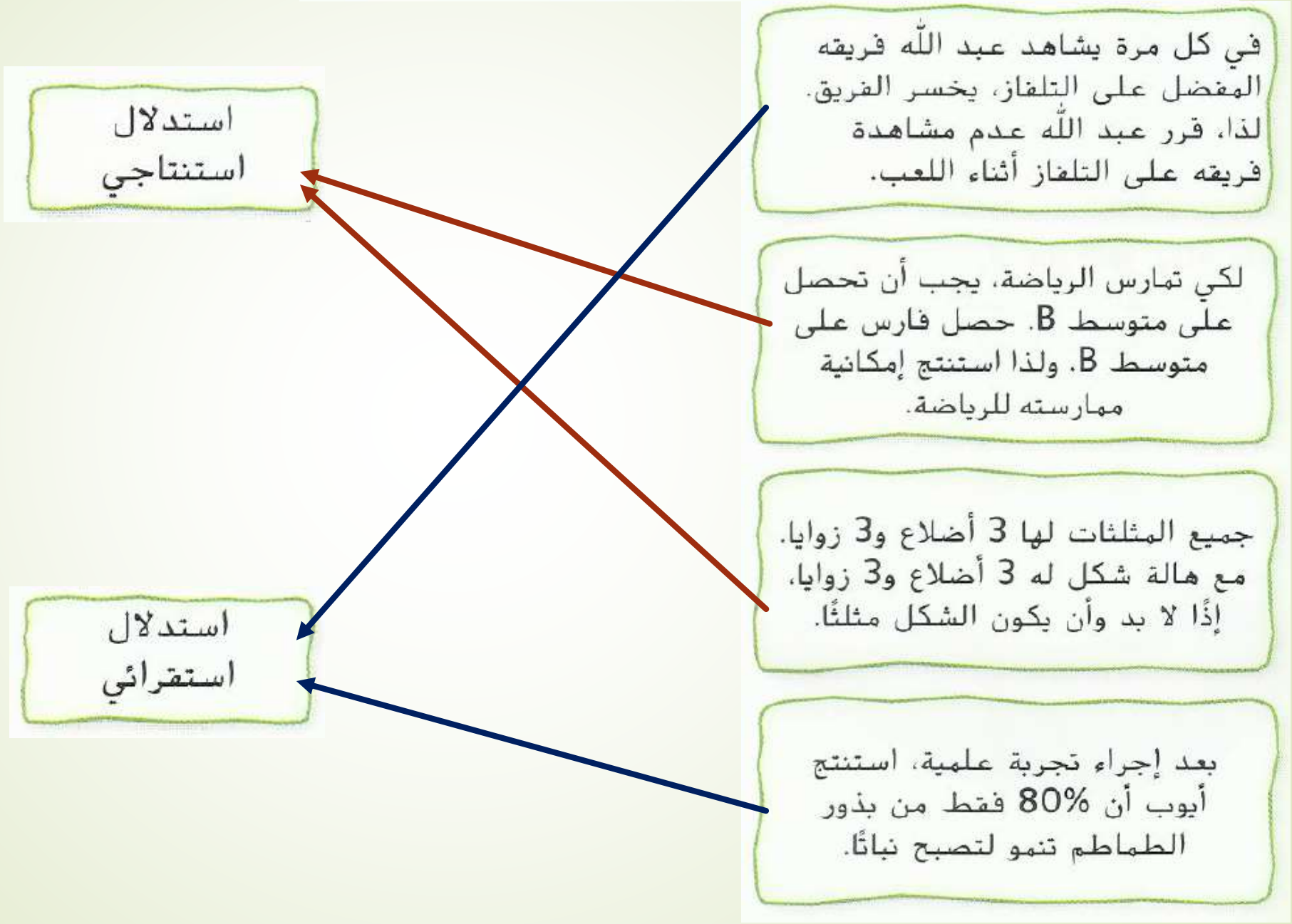
صفحة 379

محققون يستخدم محقق الشرطة التفكير التحليلي لحل الجرائم. **والاستدلال الاستقرائي** هو عملية إصدار تخمين بعد ملاحظة عدة أمثلة.

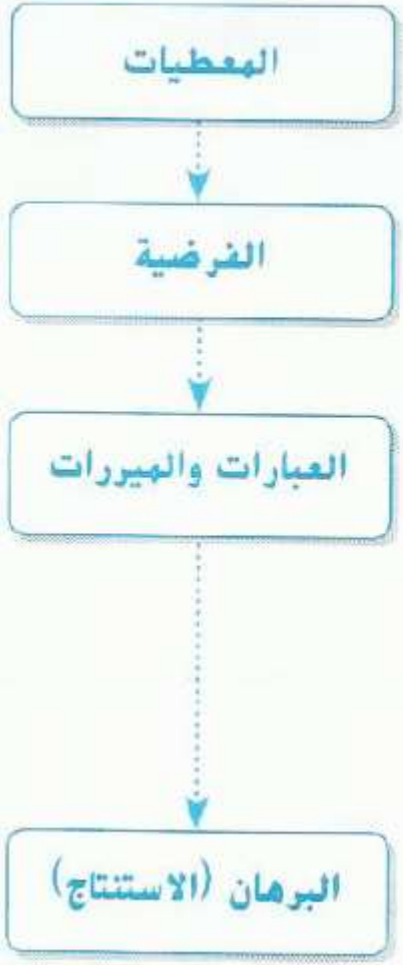
وعلى عكس الاستدلال الاستقرائي، يستخدم **الاستدلال الاستنتاجي** الحقائق أو القواعد أو التعريفات أو القوانين لعمل تخمينات من المواقف المقدمة.

صفحة 379

أكمل خريطة المفاهيم بتوصيل كل موقف مع نوع الاستدلال المستخدم.



عملية البرهنة



الخطوة 1 اكتب قائمة بالمعلومات المعطاة وصمم رسمًا تخطيطيًا إذا أمكن لتوضيح تلك المعلومات.

الخطوة 2 اذكر المطلوب إثباته.

الخطوة 3 أنشئ فرضية استقرائية بعمل تسلسل منطقي من العبارات التي تربط بين المعلومات المعطاة وما تحاول إثباته.

الخطوة 4 برر كل عبارة بسبب. يشمل المبررات التعريفات والخواص الجبرية والنظريات.

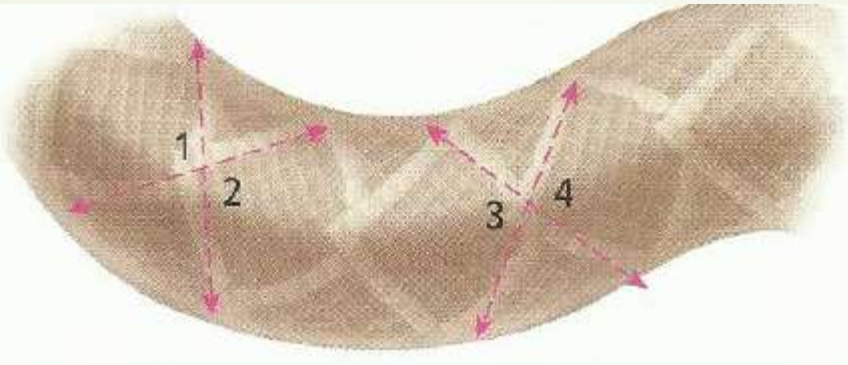
الخطوة 5 اذكر ما قمت بإثباته.

صفحة 380

البرهان هو فرضية منطقية يتم فيها تعليل كل عبارة بسبب ما. و**البرهان الحر**. يطلق عليه أيضًا **البرهان الصوري**. يتضمن كتابة فقرة تشرح سبب صحة التخمين. وفي المثال 1 أدناه، سوف تستخدم خاصية التعويض الجبرية والعلاقة الهندسية بين الزوايا المتقابلة بالرأس.

مثال

1. لأفعى الجرس السامة ظهر ذو شكل ماسي. وموضح صورة مكبرة لجلد الثعبان. فإذا كان $m\angle 1 = m\angle 4$، فاكتب برهانًا حرًا لإثبات أن $m\angle 2 = m\angle 3$.

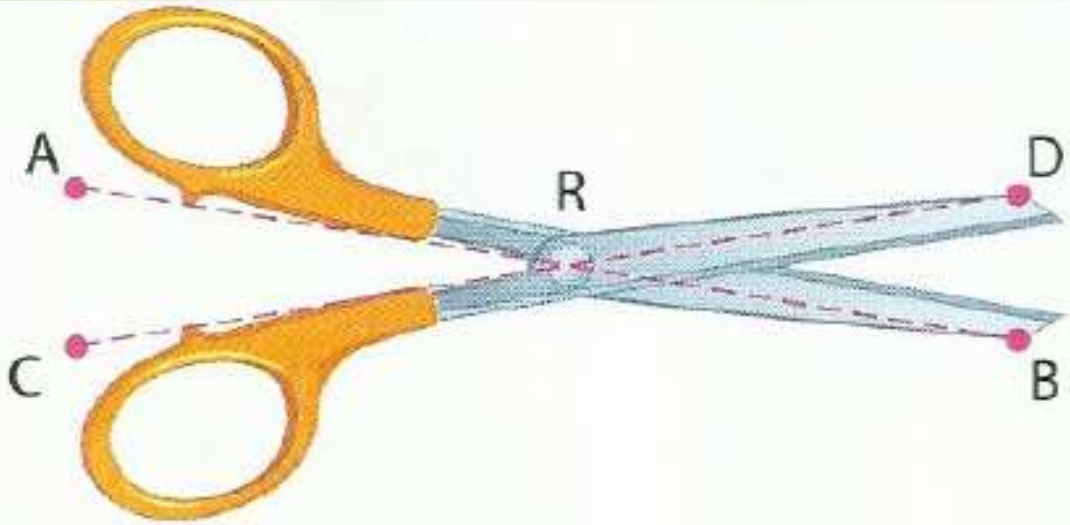


المعطيات: $m\angle 1 = m\angle 4$

المطلوب إثباته: $m\angle 2 = m\angle 3$

البرهان: $m\angle 1 = m\angle 2$ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس. وبما أن $m\angle 1 = m\angle 4$، فإن $m\angle 2 = m\angle 4$ بالتعويض. $m\angle 4 = m\angle 3$ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس. وبما أن $m\angle 2 = m\angle 4$، فإن $m\angle 2 = m\angle 3$ أيضًا بالتعويض. إذًا، $m\angle 2 = m\angle 3$.

تأكد من فهمك أوجد حلولاً للمسائل التالية لتتأكد أنك فهمت.



a. ارجع إلى الرسم التخطيطي الموضح. اكتب $AR = CR$ و $DR = BR$.

برهانًا حرًا لتوضيح أن $AR + DR = CR + BR$.

المعطيات: $AR =$ ***CR*** و $DR =$ ***BR***

المطلوب إثباته: ***AR + DR*** $= CR + BR$.

البرهان: أنت تعرف أن $AR = CR$ و $DR = BR$.

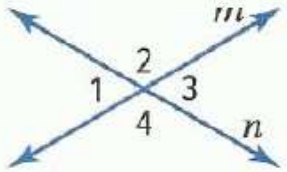
$AR + DR = CR + DR$ باستخدام خاصية ***الجمع*** في المعادلة. إذًا $AR + DR = CR + BR$ باستخدام ***التعويض***

براهين ذات عمودين

يحتوي **البرهان ذو العمودين** أو **البرهان الصوري** على *عبارات* و*أسباب* منظمة في عمودين. وبمجرد إثبات عبارة أو تخمين، يطلق عليها **نظرية**. ومن ثم يمكن استخدامها كسبب لتعليل عبارات في براهين أخرى.

مثال

2. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن الزاويتين المتقابلتين بالرأس لهما القياس نفسه.



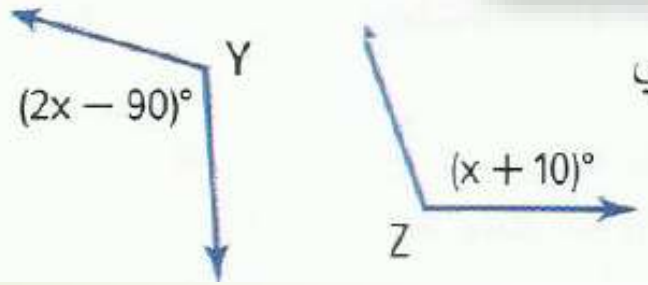
المعطيات: المستقيمان m و n متقاطعان؛ والزاويتان $\angle 1$ و $\angle 3$ متقابلتان بالرأس

اثبت أن: $m\angle 1 = m\angle 3$

العبارات	المبررات
a. المستقيمان m و n متقاطعان؛ والزاويتان $\angle 1$ و $\angle 3$ متقابلتان بالرأس	المعطيات
b. تشكل الزاويتان $\angle 1$ و $\angle 2$ زوجًا خطيًّا. وتشكل الزاويتان $\angle 3$ و $\angle 2$ زوجًا خطيًّا.	تحديد الزوج الخطي
c. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ $m\angle 3 + m\angle 2 = 180°$	تحديد الزوايا المتكاملة
d. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 2$	التعويض
e. $m\angle 3 = m\angle 1$	خاصية الطرح في المعادلة

تأكد من فهمك أوجد حلولاً للمسائل التالية لتتأكد أنك فهمت.

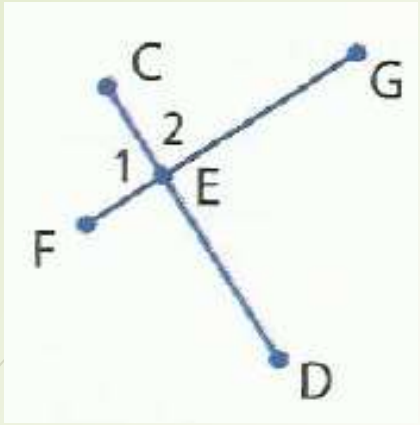
b. معطى بالأسفل عبارات البرهان ذي العمودين التي توضح أنه إذا كان $m\angle Y = m\angle Z$، فإن $x = 100$. أكمل البرهان بتقديم المبررات.



العبارات	المبررات
a. $m\angle Y = m\angle Z$, $m\angle Y = 2x - 90$, $m\angle Z = x + 10$	المعطيات
b. $2x - 90 = x + 10$	التعويض
c. $x - 90 = 10$	خاصية الطرح في المعادلة
d. $x = 100$	خاصية الجمع في المعادلة

تمرين موجّه

صفحة 382



1. استخدم الشكل لإكمال البرهان الحر. (مثال 1)

المعطيات: $m\angle 1 = m\angle 2$ و $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.

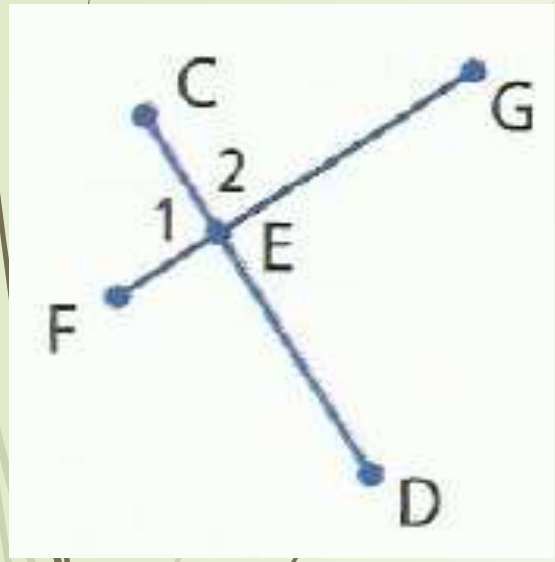
المطلوب إثباته: أن $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان قائمتان.

البرهان: $m\angle 1 + m\angle 2 =$ **180** بما أنهما زاويتان متكاملتان. وبما أن $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن $m\angle 1 + m\angle 1 = 180°$ باستخدام **التعويض**. وبحل المعادلات نحصل على $m\angle 1 =$ **90**. وبما أن $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن $m\angle 2$ تساوي **90** أيضًا. إذًا، $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان قائمتان.

تمرين موجّه

صفحة 382

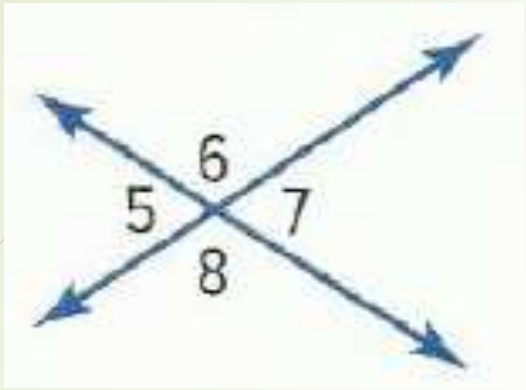
2. ارجع إلى الشكل أعلاه وأكمل البرهان ذا العمودين لإثبات أنه إذا كان $EG = 3x - 1$، و $ED = 2x + 4$، و $EG = ED$، فإن $x = 5$. (المثال 2)



العبارات	المبررات
a. $EG = 3x - 1$ و $ED = 2x + 4$ و $EG = ED$	المعطيات
b. $3x - 1 = 2x + 4$	التعويض
c. $x - 1 = 4$	خاصية الطرح في المعادلة
d. $x = 5$	خاصية الجمع في المعادلة

تمارين ذاتية

صفحة 383



1 في الشكل الوارد على اليسار، يتقاطع مستقيمان لتكوين أربع زوايا. فإذا كان $m\angle 7 = 9x$ و $m\angle 8 = 11x$، فأكمل البرهان الحر لإثبات أن $x = 9$. (المثال 1)

المعطيات: مستقيمان متقاطعان و $m\angle 7 = 9x$ و $m\angle 8 = 11x$

المطلوب إثباته: $x = 9$

البرهان: $\angle 7$ و $\angle 8$ تكونان زاوية ___مستقيمة___ إذًا الزاويتان ___متكاملتان___. إذًا، $m\angle 7 + m\angle 8 =$ ___180___، حسب تعريف الزوايا المتكاملة. وبالتعويض، يكون $9x + 11x = 180$ إذًا، $x =$ ___9___ حسب خاصية القسمة في المعادلة.

$$20x = 180$$

تمارين ذاتية

صفحة 383

2. م-٢ **بناء فرضية** تقع أربع مدن على طريق مستقيم. وتقع المدينة B في نقطة المنتصف بين المدينة A والمدينة C. وتقع المدينة C في نقطة المنتصف بين المدينة B والمدينة D. اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن المسافة بين المدينة A والمدينة B هي المسافة نفسها بين المدينة C والمدينة D. (المثال 1)

المعطيات: نقع B في منتصف $\overline{AC}$ وتقع C في منتصف $\overline{BD}$.

المطلوب إثباته: $AB = CD$.

البرهان: حسب تعريف نقطة المنتصف، فإن $BC =$ ___AB___ و $CD =$ ___BC___

إذًا، $AB = CD$ باستخدام ___التعويض___.

تمارين ذاتية

3. **بناء فرضية** أكمل البرهان ذا العمودين لإثبات أنه إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتين متكاملتين، و $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان قائمتان. (المثال 2)

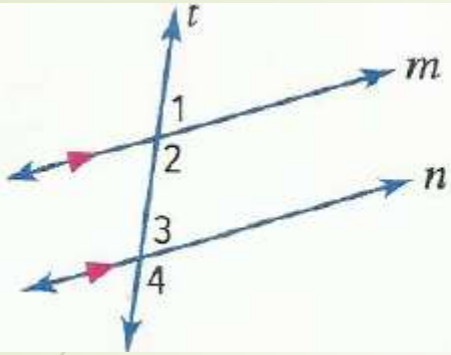
المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متكاملتان، و $m\angle 1 = m\angle 2$

المطلوب إثباته: $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان قائمتان

	العبارات	المبررات
a.	$\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان؛ $m\angle 1 = m\angle 2$	المعطيات
b.	$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$	تحديد الزوايا المتكاملة
c.	$m\angle 1 + m\angle 1 = 180°$	التعويض
d.	$2(m\angle 1) = 180°$	بَسّط
e.	$m\angle 1 = 90°$	خاصية القسمة في المعادلة
f.	$m\angle 2 = 90°$	$m\angle 1 = m\angle 2$ (معطى)
g.	$\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان قائمتان.	تحديد الزوايا القائمة

تمارين ذاتية

صفحة 384



4. **بناء فرضية** أكمل البرهان ذا العمودين لإثبات أنه عندما يقطع مستقيمين متوازيين قاطع، فإن الزوايا الداخلية المتتالية تكون متكاملة.

المعطيات: المستقيمان المتوازيان m و n يقطعهما القاطع t

المطلوب إثباته: $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.

العبارات	المبررات
a. المستقيمان m و n متوازيان ويقطعهما القاطع t	المعطيات
b. $\angle 1$ و $\angle 2$ يشكلان زاوية مستقيمة.	تحديد الزوايا المستقيمة
c. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$	تحديد الزوايا المتكاملة
d. $m\angle 3 = m\angle 1$	الزوايا المتناظرة لها القياس نفسه .
e. $m\angle 3 + m\angle 2 = 180$	التعويض
f. $\angle 2$ و $\angle 3$ زاويتان متكاملتان	تحديد الزوايا المتكاملة

صفحة 384

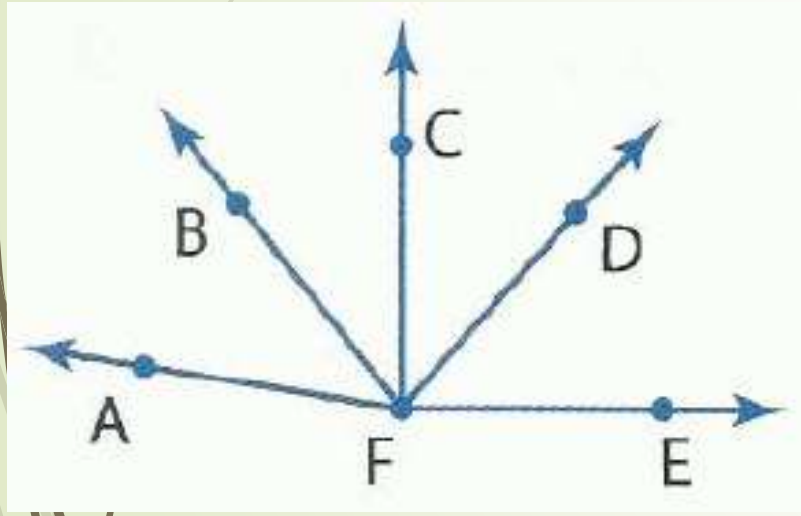
7. **الاستدلال الاستقرائي** في الرسم التخطيطي، $m\angle CFE = 90°$ و $m\angle AFB = m\angle CFD$. أي من الاستنتاجات التالية *ليس* صحيحًا بالضرورة؟

a. $m\angle CFD = m\angle AFB$

b. $\angle CFE$ هي زاوية قائمة

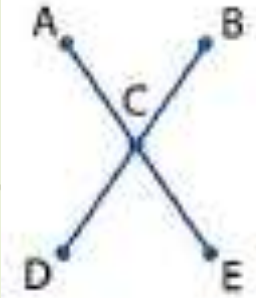
c. $m\angle AFB + m\angle DFE = 90°$

d. $\overline{BF}$ تقسم $\angle AFD$ نصفين



تمرين إضافي صفحة 385

صفحة 385



8. **بناء فرضية** في الشكل الوارد على اليسار، $AE = DB$ و C في منتصف $\overline{AE}$ و $\overline{DB}$. أكمل البرهان لإثبات أن $AC = CB$.

المعطيات: $AE = DB$ و C في منتصف $\overline{AE}$ و $\overline{DB}$.

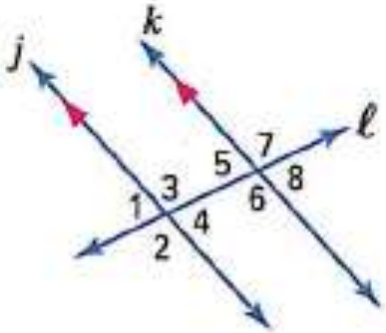
المطلوب إثباته: $AC = CB$

البرهان: بما أن C في منتصف $\overline{AE}$ و $\overline{DB}$، فإن $AC = CE = \frac{1}{2}AE$ و $DC = CB = \frac{1}{2}DB$ حسب تعريف نقطة المنتصف. تشير المعطيات إلى أن $AE = DB$. وحسب خاصية **الضرب** في المعادلة.. فإن $\frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}DB$. إذًا، باستخدام **التعويض** فإن $AC = CB$.

تمرين إضافي

صفحة 385

9. **بناء فرضية** ارجع إلى الشكل الوارد على اليسار. أكمل البرهان ذا العمودين لإثبات أنه إذا كان $m\angle 3 = 2x - 15$ و $m\angle 6 = x + 55$. فإن $x = 70$.



المعطيات: $j \parallel k$. يقطعهما ℓ؛ $m\angle 3 = 2x - 15$, $m\angle 6 = x + 55$

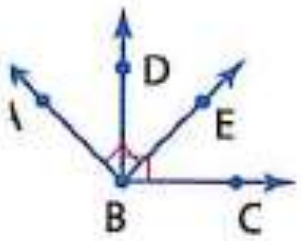
المطلوب إثباته: $x = 70$

	العبارات	المبررات
a.	$j \parallel k$. يقطعهما ℓ؛ $m\angle 3 = 2x - 15$. $m\angle 6 = x + 55$	المعطيات
b.	$m\angle 6 = m\angle 3$	الزوايا الداخلية المتبادلة لها القياس نفسه.
c.	$2x - 15 = x + 55$	التعويض
d.	$x - 15 = 55$	خاصية الطرح في المعادلة
e.	$x = 70$	خاصية الجمع في المعادلة

تمرين إضافي

صفحة 385

10. **بناء فرضية** ارجع إلى الشكل الوارد على اليسار. أكمل البرهان ذا العمودين لإثبات أنه إذا كانت $\angle ABE$ و $\angle DBC$ زاويتين قائمتين، فإن $m\angle ABD = m\angle EBC$.



المعطيات: $\angle ABE$ و $\angle DBC$ زاويتان قائمتان.

المطلوب إثباته: $m\angle ABD = m\angle EBC$

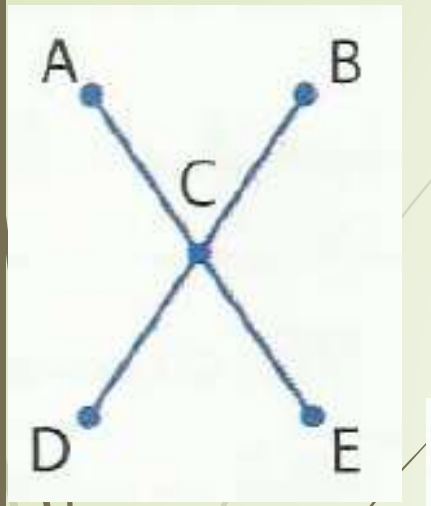
	العبارات	المبررات
a.	$\angle ABE$ و $\angle DBC$ زاويتان قائمتان.	المعطيات
b.	$m\angle ABE = 90$ و $m\angle DBC = 90$	تحديد الزوايا القائمة
c.	$m\angle ABD + m\angle DBE = 90$ $m\angle DBE + m\angle EBC = 90$	جمع الزوايا
d.	$m\angle ABD + m\angle DBE = m\angle DBE + m\angle EBC$	التعويض
e.	$m\angle ABD = m\angle EBC$	خاصية الطرح في المعادلة

أنطلق! تمرين على الاختبار

صفحة 386

11. في الرسم التخطيطي الموضح، $\overline{AE}$ يتقاطع مع $\overline{DB}$ عند النقطة C.

حدد إذا ما كان كل من الاستنتاجات التالية صحيحًا دائمًا أم لا. اختر نعم أو لا.



a. $m\angle ACD = m\angle BCE$	نعم ☑	لا ☐
b. $\angle ACD$ و $\angle ECD$ تشكلان زوجًا خطيًا.	نعم ☑	لا ☐
c. $\angle DCE$ و $\angle ACB$ زاويتان متقابلتان بالرأس.	نعم ☑	لا ☐
d. $\angle ACB$ و $\angle BCE$ زاويتان متتامتان.	نعم ☐	لا ☑

انطلق ١ تمرين على الاختبار

12. حدد السبب المناسب لكل عبارة من البرهان الهندسي التالي.

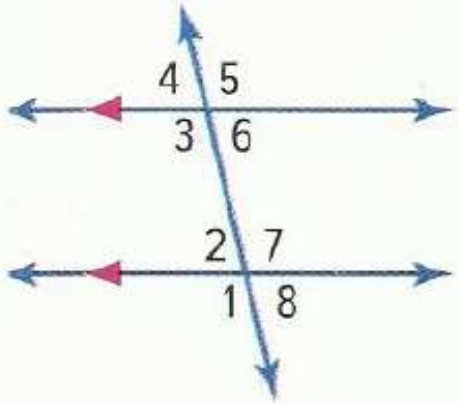
الزوايا المتقابلة بالرأس لها القياس نفسه.	خاصية القسمة في المعادلة	التعويض
الزوايا المتناظرة لها القياس نفسه.	الزوايا الداخلية المتبادلة متساوية القياس.	المعطيات

المعطيات: مستقيمان متوازيان يقطعهما قاطع.

$m\angle 1 = 2x$ و $m\angle 3 = 94$

المطلوب إثباته: $x = 47$

البرهان:



العبارات	التبرير
a. $m\angle 1 = 2x,\ m\angle 3 = 94$	المعطيات
b. $m\angle 1 = m\angle 3$	الزوايا المتناظرة لها نفس القياس
c. $2x = 94$	التعويض
d. $x = 47$	خاصية القسمة في المعادلة